·问题讨论·

古代投石机运转和投射机制的物理学研究

王昕明
(江苏联合职业技术学院如东分院,江苏 如东 226400)

摘 要: 通过引入合理化的投石机模型,运用物理学的能量守恒原理,建立了投石机在平衡位置附近的振动方程,推导出投石机投射时的最大可能速度公式,从理论上推导出投石机应该采用的最佳运转结构机制;同时分析了采用何种投射方式,既能有效增加投射高度和距离,又能增加投射精度.

关键词: 投石机;投射机制;能量守恒原理

1 引言

投石机主要是中、外古代的一种攻城射击武器,它可把一块巨石(或其他火器弹药)直接投进攻击敌方城墙和城内,造成毁灭性破坏.[1] 图 1 为古代投石机的试验实物和模型. 近代投石机试验的结果表明,投射臂长 50 英尺(约 15 m),平衡重锤为 10 t 的投石机能将 200—300 磅(约 90—140 kg)的石块或弹体抛射约 300 码(约 270 m)的飞行距离. 但是到了 14 世纪中期,有的古代抛石机竟然还能连续抛射将近 1000 磅(约 450 kg)重的石块或弹体.[2] 古代投石机结构和种类虽然有很多,外形也不尽相同,但常见的古代投石机都配备有投射臂和平衡重锤,并通过其底座将所有的投射臂和平衡重锤都固定了起来,依靠将投射臂和平衡重锤的重力势能直接转化为所有投射物的重力动能,从而将所有的投射物完全抛射出去.

图 1 投石机实物模型

从投石机的运转结构来看,投石机的底座可以是固定的,也可以是可自由移动的(如在底座上装上车轮);平衡重锤可以固定在投射臂上,也可以绕着投射臂的端点自由转动. 投石机采用何种运转结构可以将投射物投射的速度更快? 如何计算投射物投射时的最大速度? 投石机在投射时会在什么位置上将投射物投射出去? 投石机如何操作才能使得投射距离最远?

针对以上问题,本文对投石机结构进行简化,引入简化的投石机模型. 为了理论分析和计算方便,本文又根据投石机的实物模型,合理地设定了投石机投射臂、平衡重锤、底座质量、投石机投射臂和平衡重锤的尺度. 同时,应用本文引入的投石机模型,通过物理学理论分析,得出了投石机最佳的运转机制,计算出了投射物投射的最大速度,并从理论上得出了投石机怎样操作才能投射最远距离的方法.

本文理论分析的结果对研究投石机在古代战争中的应用具有一定的理论指导意义,更是提高了学生运用物理学理论分析与解决实际问题的能力.

2 投石机运转机制研究

为了研究问题方便,引入以下假设数据,假设投射臂的质量为 m,臂长为 $2l$,平衡重锤为一个圆盘,质量为 $4m$,半径为 $l/2$,底座的质量为 $5m$,投射臂可以绕着底座上转轴 C 自由转动,如图 2 所示. 由于投射物的质量远远小于投石机投射臂和平衡重锤的质量,因此,在实际分析中可以不考虑被投射物的质量,转动时的摩擦力也不计.

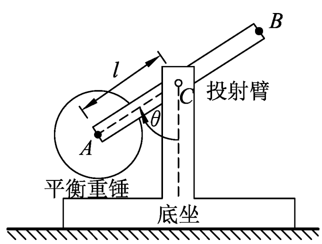

图 2 投石机的简化模型

在实际使用时,投石机可以有以下 3 种装设的方式.

① 底座固定在地面上,将平衡重锤的中心锁紧固定在投射臂上,不能自由转动,即平衡重锤和投射臂一起运动.

② 底座固定在地面上,将平衡重锤的中心和投射臂下端 A 点重合,平衡重锤可以绕着其中心自由

转动,即平衡重锤和投射臂松开,没有紧锁在一起.

③ 底座在水平地面上自由滑动且无摩擦,而平衡重锤的中心和投射臂下端 A 点重合,平衡重锤可以绕着其中心自由转动,即平衡重锤和投射臂松开,没有紧锁在一起.

从投石机的结构可以看出,投石机要能够将投射物投射出去,首先要通过人工的方法,让平衡重锤上升,依靠将平衡重锤的重力势能转化为投射物的动能,从而将投射物投射出去.

在投石机实际发射时,投射物和平衡重锤都绕着底座上转轴做圆周运动,因此,投射物并不会自动离开投石机飞离出去.在图2所示的投石机结构中,只有当平衡重锤落到最低点,而投射物上升到最高点时,由于平衡重锤的质量远大于投射物的质量,平衡重锤将在最低点振荡,投射物也将在最高点振荡,最终将投射物投射出去.因此,平衡重锤在最低点(或投射物在最高点)时的振荡频率大小,将会影响投射物能否能被投射出去以及投射的速度,当然投射物投射的最大速度还与初始时平衡重锤所处位置、投射臂的长度等因素有关.

2.1 投石机在第一种装设方式之下的运转分析

在第1种装设方式之下,可将平衡重锤和投射臂作为一个整体系统进行分析.整体系统的动能为 $E_k=E_{k1}+E_{k2}$,其中,E_{k1} 为平衡重锤的动能,E_{k2} 为投射臂的动能,因为二者紧锁连接在一起,所以,平衡重锤和投射臂以同一转速 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$ 绕着转轴 C 转动.根据转动动能关系式可得平衡重锤转动动能[3]

$$E_{k1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\times4m\times\left(\frac{l}{2}\right)^2+4m\times l^2\right]\omega^2=\frac{9}{4}ml^2\omega^2,$$

投射臂相对于转轴 C 的转动动能为

$$E_{k2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\times m\times(2l)^2\right]\omega^2=\frac{1}{6}ml^2\omega^2.$$

总的动能为 $E_k=E_{k1}+E_{k2}=\frac{29}{12}ml^2\omega^2$.

取平衡系统质心的转动速度到最低电平衡位置时重力势能的值为0,根据质心转动定理,[4]将重力平衡系统的重锤和投射臂作为一个固定的整体,其质心转动位置 $L=\frac{4m\cdot l}{4m+m}=\frac{4}{5}l$.其重力势能为

$$E_p=5mgL(1-\cos\theta)=5mg\left(\frac{4}{5}l\right)(1-\cos\theta)=4mgl(1-\cos\theta).$$

当角度很小时,

$$E_p=4mgl(1-\cos\theta)\approx4mgl\left(\frac{1}{2}\theta^2\right).$$

系统的机械能可表示为

$$E=E_{k1}+E_{k2}+E_p=\frac{29}{12}ml^2\omega^2+4mgl\left(\frac{1}{2}\theta^2\right).$$

若不考虑摩擦阻力时,系统的机械能守恒,对上式两边对时间求导可得[5]

$$\frac{29}{12}ml^2\left(2\omega\frac{d\omega}{dt}\right)+2mgl\left(2\theta\frac{d\theta}{dt}\right)=0,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left(\frac{24g}{29l}\right)\theta=0.$$

此微分方程的解是典型的简谐运动的偏微分方程,可解得到其振动的角频率为 $\omega=\sqrt{\frac{24g}{29l}}$.

根据圆周运动的理论可知,要使得投射物能够运动到最高点,并顺利投射出去必须满足:[1] $a_{向心}=\frac{\omega^2}{l}\geqslant g$,即 $l\geqslant\frac{29}{24}$.在本文所设定的投石机参数的情况下,投射臂的长度至少在3 m左右才能进行发射,否则投射物在没有达到发射高度之前就会从投石机上掉落下来,当然在实际使用时,投射臂的长度要远远超出此长度.

如果初始时两个投射臂与系统的竖直位置形成夹角的值为 θ_0,取系统质心的转动速度降到最低的位置时重力势能的值为0,则投射臂初始时重力势能的值为

$$E_{p0}=5mgL(1-\cos\theta_0)=5mg\left(\frac{4}{5}l\right)(1-\cos\theta_0)=4mgl(1-\cos\theta_0).$$

根据系统的动能公式,总的动能为

$$E_k=E_{k1}+E_{k2}=\frac{29}{12}ml^2\omega^2.$$

当平衡重锤落到最低点时,根据机械能守恒原理可得 $E_k=E_{p0}$,即

$$E_k=\frac{29}{12}ml^2\omega^2=E_{p0}=4mgl(1-\cos\theta_0),$$

$$\omega=\sqrt{\frac{48g}{29l}(1-\cos\theta_0)}.$$

投射臂上 B 点的线速度为

$$v=\omega l=\sqrt{\frac{48gl}{29}(1-\cos\theta_0)}=1.29\sqrt{gl(1-\cos\theta_0)}.$$

由上式可知,在第1种装设方式之下,投石机的投

射物所能达到的最大速度与投射臂长度以及平衡重锤的初始位置有关,实际上还跟平衡重锤与投射臂的质量比有关,质量比越大,投射物所能达到的最大速度也就越大,当然要使得投射物能够顺利投射出去,投射臂还必须达到一定的长度.

2.2 投石机在第 2 种装设方式之下的运转分析

对于第 2 种装设方式,由于平衡重锤的中心和投射臂下端 A 点重合,平衡重锤可以绕着其中心自由转动,平衡重锤的转动动能为

$$E_{k1}=\frac{1}{2}\times 4m\times(l\omega)^2+\frac{1}{2}\times 4m\times l^2\times 0=2ml^2\omega^2.$$

投射臂相对于转轴 C 的转动动能为

$$E_{k2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\times m\times(2l)^2\right]\omega^2=\frac{1}{6}ml^2\omega^2.$$

总的动能为 $E_k=E_{k1}+E_{k2}=\frac{13}{6}ml^2\omega^2$,

其重力势能为

$$E_p=5mgL(1-\cos\theta)=5mg\left(\frac{4}{5}l\right)(1-\cos\theta)=4mgl(1-\cos\theta).$$

当角度很小时,

$$E_p=4mgl(1-\cos\theta)\approx 4mgl\left(\frac{1}{2}\theta^2\right).$$

系统的机械能可表示为

$$E=E_{k1}+E_{k2}+E_p=\frac{13}{6}ml^2\omega^2+4mgl\left(\frac{1}{2}\theta^2\right).$$

若不考虑摩擦阻力,系统的机械能守恒,对上式两边对时间求导可得

$$\frac{13}{6}ml^2\left(2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)+4mgl\left(2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{12g}{13l}\right)\theta=0.$$

此方程是典型的简谐运动方程,可得出角频率为 $\omega=\sqrt{\frac{12g}{13l}}$.

同样根据圆周运动的理论可知,要使得投射物能够运动到最高点,并顺利投射出去必须满足:$a_{向心}=\frac{\omega^2}{l}\geqslant g$,即 $l\geqslant\frac{13}{12}$.在本文所设定的投石机参数的情况下,投射臂的长度至少在 2 m 左右才能进行发射,否则投射物在没有达到发射高度之前就会从投石机上掉落下来.

如果初始时两个投射臂与系统的竖直位置形成夹角的值为 θ_0,取系统质心的转动速度降到最低的位置时重力势能的值为 0,则投射臂初始时重力势能的值为

$$E_{p0}=5mgL(1-\cos\theta_0)=5mg\left(\frac{4}{5}l\right)(1-\cos\theta_0)=4mgl(1-\cos\theta_0).$$

根据系统的动能公式,总的动能为

$$E_k=E_{k1}+E_{k2}=\frac{13}{6}ml^2\omega^2.$$

当平衡重锤落到最低点时,根据机械能守恒原理可得 $E_k=E_{p0}$,即

$$E_k=\frac{13}{6}ml^2\omega^2=E_{p0}=4mgl(1-\cos\theta_0),$$

$$\omega=\sqrt{\frac{24g}{13l}(1-\cos\theta_0)}.$$

投射臂上 B 点的线速度为

$$v=\omega l=\sqrt{\frac{24gl}{13}(1-\cos\theta_0)}=1.36\sqrt{gl(1-\cos\theta_0)}.$$

同样由上式可知,在第 2 种装设方式之下,投石机的投射物所能达到的最大速度也与投射臂长度以及平衡重锤的初始位置有关,实际上也还跟平衡重锤与投射臂的质量比有关,质量比越大,投射物所能达到的最大速度也就越大,当然要使得投射物能够顺利投射出去,投射臂也还必须达到一定的长度.

2.3 投石机在第 3 种装设方式之下的运转分析

对于第 3 种装设方式,由于底座在水平地面上自由滑动且无摩擦,而平衡重锤的中心和投射臂下端 A 点重合,平衡重锤可以绕着其中心自由转动,所以当系统质心 x 以水平速度 v_x 运动时,由动量守恒定律可得[6]

$$v_x-(-v_x)=-L\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},2v_x=-\left(\frac{4}{5}l\right)\omega,$$

$$v_x=-\frac{2}{5}l\omega,$$

因此,平衡重锤和投射臂的质心的平动动能为

$$E_{k平动}=\frac{1}{2}(5m)v_x^2=\frac{1}{2}(5m)\left(-\frac{2}{5}l\omega\right)^2=\frac{2}{5}ml^2\omega^2.$$

系统相对于质心的转动动能

$$E_{k转动}=E_{圆盘}+E_{投射臂}=\frac{1}{2}(4m)[(l-L)\omega]^2+\left[\frac{1}{2}m(L\omega)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2\right]=\frac{17}{30}ml^2\omega^2.$$

底座的平动动能

$$E_{底坐}=\frac{1}{2}(5m)(-v_x)^2=\frac{1}{2}(5m)\left(-\frac{2}{5}l\omega\right)^2=\frac{2}{5}ml^2\omega^2.$$

总动能则为

$$E_k=E_{平动}+E_{转动}+E_{底坐}=\frac{41}{30}ml^2\omega^2.$$

整个系统的机械能

$$E=E_k+E_p=\frac{41}{30}ml^2\omega^2+2mgl\theta^2.$$

在不考虑摩擦阻力时,机械能守恒,对上式对时间求导可得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left(\frac{60g}{41l}\right)\theta=0,得\ \omega=\sqrt{\frac{60g}{41l}}.$$

同样,根据圆周运动的理论可知,要使得投射物能够运动到最高点,并顺利投射出去必须满足:$a_{向心}=\frac{\omega^2}{l}\geqslant g$. 由以上推导可看出,从理论上来说第 3 种装设方式对投石机投射臂的长度没有限制.

如果初始时两个投射臂与系统的竖直位置形成夹角的值为 θ_0,取系统质心的转动速度降到最低的位置时重力势能的值为 0,则投射臂初始时重力势能的值为

$$E_{p0}=5mgL(1-\cos\theta_0)=5mg\left(\frac{4}{5}l\right)\cdot(1-\cos\theta_0)=4mgl(1-\cos\theta_0).$$

根据系统的动能公式,总的动能为

$$E_{p0}=5mgL(1-\cos\theta_0)=5mg\left(\frac{4}{5}l\right)(1-\cos\theta_0)=4mgl(1-\cos\theta_0).$$

当平衡重锤落到最低点时,根据机械能守恒原理可得 $E_k=E_{p0}$,即

$$E_k=E_{k1}+E_{k2}+E_{底坐}=\frac{41}{30}ml^2\omega^2.$$

$$\omega=\sqrt{\frac{120g}{41l}(1-\cos\theta_0)}.$$

由于投射臂上的端点 B 相对于转轴 C 有一个速度 $v_{BC}=l\omega$. 因为转轴 C 与系统质心 x 以相同的水平速度运动,因此 C 相对于地面有一个向左的速度[7] $v_C=\frac{2}{5}l\omega$,因此,B 点相对于地面的速度为

$$v_B=v_{BC}+v_C=l\omega+\frac{2}{5}l\omega=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{120gl}{41}(1-\cos\theta_0)}=2.4\sqrt{gl(1-\cos\theta_0)}.$$

由前述内容可知,应用第 3 种装设的方式,投石机可以将投射物投射得更快,在相同条件下也可将投射物投射得更远. 因此,从古代流传下来的投石机的模型来看,投石机的平衡重锤都是可以自由转动的,投石机下面一般要装上轮子,这就由投石机变为投石车,一方面便于移动,另一方面也减少了投石车与地面的摩擦,使得投射物被投射得更快、更远. 投石机的平衡重锤一般都要配制得比较重,而从上述理论分析可知,要使得投射物能投射得更快、更远,在保证投石机稳定的前提下,底座的重量应该是越轻越好.

3 投石机投射机制的研究

前述内容从理论上证明了,如果在投石机的底座装上轮子,并且与投射臂相连的平衡重锤可以绕着其中心自由转动,即平衡重锤和投射臂松开,没有紧锁在一起,应用这种装设方式,投石机可以将投射物投射得更快、更远. 同时得出了投射物投射的最大速度公式,由速度公式可知,投射物所能达到的最大速度与投射臂长度、平衡重锤的初始位置以及底座的质量有关,实际上还跟平衡重锤与投射臂的质量比有关,质量比越大,投射物所能达到的最大速度也就越大.

但在前述内容证明中,假设了平衡重锤到达最低位置,即投射物到达最高位置时,由于平衡重锤和投射物的振荡,从而将投射物投射出去. 而实际上当平衡重锤到达最低位置,投射物到达最高位置时,投射物将被水平抛出,虽然这种情况下投射物被抛出的速度最大,但抛射高度和距离却受到限制,如果以这种方式进行投射,投石机必须放置在较高的位置或投石机的底座要做得很高. 因此,在古代战争中,投石机往往被放置在高台上或将底座建得很高,或将投石机的投石臂做得较长,这样才能使得投石机能击中更高、更远的目标.

在投石机的结构确定的情况下,要使得投石机能够射中更高的目标或更远的距离,那就要将投石机的发射由平射改为斜射,如何才能将投射物斜射出去? 由图 1 的投石机的实物图可以看出,只要在投射臂上安装拦截绳,就可以使得投石机将投射物斜射出去. 如图 1 所示,当投射臂运转到一定位置时,拦截绳阻止投射臂继续转动,这时平衡重锤、投射臂以及被投射物将(下转第 66 页)